Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Développements :

Invariants de similitude (Réduction de Frobenius), Algorithme de Berlekamp.

Bibliographie :

Grifone, Gourdon, Nourdin, Objectif agrégation, Rombaldi, Papini.

Rapport du jury :

Dans cette leçon, il est important de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie. Les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses, on peut par exemple évoquer l'existence de polynômes annulateurs ou alors décomposer les isométries en produits de réflexions. S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindre carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement explorer l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

Remarque : E est un espace vectoriel sur un corps K (commutatif).

1 Théorie de la dimension

1.1 Familles libres, génératrices, bases

Définition 1 (Grif p10,12,13)**.** *Famille libre, génératrice. Base*

Proposition 2 (Gri p14)**.** *Sur-famille d'une famille génératrice. Sous-famille d'une famille libre.*

1.2 Existence de bases d'un espace vectoriel

Définition 3 (Gri p11)**.** *Dimension finie. Dimension infinie.*

Dans la suite, on considère des espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 4 (Gri p15)**.** *Il existe une base telle que $L \subset B \subset G$ où L libre et G génératrice.*

Corollaire 5 (Gri p16)**.** *Tout K-ev admet une base.*
De toute famille génératrice, on peut extraire une base.
Théorème de la base incomplète.

Proposition 6 (Gri p13)**.** *Soit $\{v_1, ..v_n\}$ une base de E, bijection avec K^n.*

1.3 Dimension d'un espace-vectoriel

Lemme 7 (Gri p17)**.** *Dans un ev engendré par n éléments, toute famille contenant plus de n éléments est liée.*

Application 8 (OA)**.** *Soit A une k-algèbre de dimension finie n et $a \in A$. Alors il existe un polynôme annulateur de a.*

Théorème 9 (Gri p17)**.** *Toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Dimension.*

Exemple 10 (Gri p18)**.** *Dimension de K^n, $K_n[X]$, $M_{n,m}$.*

Exemple 11 (Nourdin p)**.** *Suites définies par récurrence d'ordre* 2 *est de dim* 2.

Application 12 (Gri p18)**.** *Dimension d'un produit d'ev.*

Corollaire 13 (Gri p18)**.** *Dans un ev de dim n, les familles ayant moins de n éléments ne peuvent pas être génératrices.*

Théorème 14 (Gri p19)**.** *Toute famille génératrice/libre ayant n éléments est une base.*

1.4 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 15 (Gri p19)**.** *Soit F un sev de E. Alors $dim(F) \leq dim(E)$ et $dim(F) = dim(E)$ si et seulement si $F = E$.*

Application 16 (OA p151)**.** *Une forme linéaire est soit nulle, soit injective.*

Exemple 17 (Romb p245)**.** *Une extension L sur K est un espace vectoriel sur K. Sa dimension est appelée degré de l'extension, notée $[L : K]$.*
Le cardinal d'un corps fini est toujours une puissance d'un nombre premier.
Base télescopique.

Proposition 18 (Gri p27)**.** *$E = E_1 \oplus ... \oplus E_p$ si et seulement si $E = E_1 + ... + E_p$ et $dim(E) = dim(E_1) + ... + dim(E_p)$.*

Application 19 (Gri p164). *f est diagonalisable si et seulement si ses la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à la dimension de E.*

Proposition 20 (Gri p22). *Existence du supplémentaire. Non unicité mais même dimension.*

Remarque (oral) : C'est ce théorème qui est la base d'énormément de raisonnements par récurrence.

Application 21. *Les endomorphismes d'un ev sur un corps algébriquement clos sont trigonalisables.*

Proposition 22 (Gri p24). *Formule de Grassman.*

Corollaire 23 (Gri p23). *$E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si $dim(E) = dim(E_1) + dim(E_2)$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.*

Remarque (oral) [Gourdon p110] Faux si plus de 2 sev.

Application 24 (Gourdon p114). *Si E est un K-ev et F est un sev de E alors $codim(F) := dim(E/F) = dim(E) - dim(F)$.*

Exemple 25. *S_n et A_n sont supplémentaires dans M_n.*

2 Applications linéaires, dimension et rang

2.1 Dimension d'espaces vectoriels et applications linéaires

Proposition 26 (Gri p61). *L'image d'une famille libre/génératrice/base par une application injective/surjective/bijective est libre.*

Théorème 27 (Gri p61). *Deux ev de dim finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.*

Application 28 (OA p152). *L'ensemble des solutions de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ est un espace vectoriel de dimension n.*

Proposition 29 (Gri p66). *Isomorphisme entre $L(E, F)$ et $M_{n,m}$ et dimension de $L(E, F)$.*

2.2 Théorème du rang

Définition 30 (Gri p59 et p80). *Rang d'un application linéaire.*

Proposition 31 (Gri ex8p90). *Si f est surjective alors $rg(g \circ f) = rg(g)$. Idem injective.*

En composant à gauche ou à droite par une application bijective, le rang ne change pas.

Théorème 32 (Gri p62). *Théorème du rang. Tout supplémentaire de* $\mathrm{Ker}(f)$ *est isomorphe à l'image de f.*

Application 33 (Gri p63). *Injective si et seulement si surjective si et seulement si bijective*

Contre exemple 34 (Gri p63). *Dérivée d'un polynôme*

Application 35 (OA). *Si A est une k-algèbre de dimension finie, A est intègre si et seulement si A est un corps.*

Application 36 (Gri p90). *Projecteurs*

2.3 Formes linéaires et dimension

Proposition 37 (Gou p127). *$dim(E) = dim(E^*)$*

Exemple 38. *L'application trace est une forme linéaire. Son noyau est un hyperplan de dimension $n^2 - 1$ donc un supplémentaire est $Vect(E_{1,1})$.*

Proposition 39 (Gou p127). *E est isomorphe à E^{**}.*

Définition 40 (Gou p128). *Définitions orthogonaux.*

Proposition 41 (Gou p128). *Dimension des orthogonaux.*

Application 42 (Gou p128). *Equations d'un sev en dimension finie. Soit E un K-ev de dimension finie n.*

1. *Soit p formes linéaires $\phi_1, .., \phi_p$ de E^* telles que $dim(vect(\phi_1, .., \phi_p)) = r$. Alors le sev $F = \{x \in E, \forall i, \phi(x) = 0\}$ est de dimension $n - r$.*
2. *Réciproquement, si F est un sev de E de dimension q, il existe $n - q$ formes linéaires indépendantes $\phi_1, ..., \phi_{n-q}$ telles que $F = \cap_{i=1}^{n-q} ker(\phi_i)$.*

Application 43 (Gou ou H2G2). *Invariants de similitude*

3 Matrices et calcul effectif du rang

3.1 Matrices et rang

Définition 44 (Gri p59 et p80). *Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice.*

Proposition 45. *$rg(f) = rg(A)$ pour A la matrice de f dans une base B.*

Application 46. *$rg(M) = n$ si et seulement si M est inversible.*

3.2 Calcul du rang

Proposition 47. *Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, ainsi que les permutations de lignes/colonnes ne changent pas le rang de M. On peut ainsi utiliser le Pivot de Gauss pour réduire M par équivalence à une matrice échelonnée, dont le rang est égal au nombres d'échelons non-nuls.*

Proposition 48 (Gou p122)**.** *A est de rang r si et seulement si A est équivalente à J_r.*

Application 49 (Gou p122)**.** *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

Application 50 (Gou p122)**.** $rg(A) = rg(A^t)$

Remarque (oral) :[Gou p122] Rang des colonnes = rang des lignes

Théorème 51 (Gou p122)**.** *Rang de A et matrices extraites.*

Application 52 (OA p157)**.** *Si A est une matrice de rang r, il existe un voisinage de A où toutes les matrices sont de rang $\geq r$.*

Application 53. *Le rang est une notion qui est invariante par extension de corps.*

4 Exemples d'utilisations de la dimension et du rang

4.1 Algorithme de Berlekamp

Théorème 54 (OA)**.** *Algorithme de Berlekamp. Nombre de facteurs irréductibles d'un polynôme sans facteurs carrés à coefficients dans un corps fini en fonction du rang et calcul de ces facteurs.*

4.2 Codes correcteurs

Définition 55 (Papini p105)**.** *Code linéaire : sev C de dim k de F_q^n.*

Définition 56 (Papini p106)**.** *Matrice génératrice. Une matrice dont les vecteurs lignes forment une base de C. $C = \{uG, u \in F_q^k\}$.*

Proposition 57 (Papini p106)**.** *Soit C un code linéaire sur un corps K. Alors*

1. *Toute matrice génératrice est une matrce $k \times n$ sr K avec $k \leq n$ dont le rang est k.*
2. *Inversement, toute matrice $k \times n$ sur K de rang k est une matrice génératrice d'un code (n, k) sur K.*

Définition 58 (Papini p105)**.** *Poids.*

Définition 59 (Papini p106)**.** *Distance minimale : plus petit poids d'un mot non nul. Un code linéaire est t-correcteur si la distance minimale est $2t + 1$ ou $2t + 2$.*

Théorème 60 (Papini p109)**.** *Borne de singleton.*

Exemple 61 (Papini p106)**.** *Exemple d'une matrice génératrice, donner les mots et la distance minimale.*